Corrigé de l'épreuve Mathématiques II : Session 2017

Ce corrigé est proposé par le professeur ADHAM ELBEKKALI.

Problème 1

Partie I: Exemple

1. Polynôme caractéristique[1] de A : $\chi_{A(t)} = X^2 - \mathrm{tr}(A(t))X + \det(A(t)) = X^2 - \left(1+\frac{1}{t}\right)X + \frac{1}{t} = (X-1)(\left(X-\frac{1}{t}\right)$.
2. Soit $t \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$. On a $\mathrm{Spe}\,(A(t)) = \left\{1, \frac{1}{t}\right\}$, donc $A(t)$ est diagonalisable puisqu'elle de taille 2 et elle possède deux valeurs propres distinctes.

   Déterminons E_1 le sous espace propre de $A(t)$ associé à la valeur propre 1.

   Pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\,1}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} X \in E_1 &\iff A(t)X = X \\ &\iff \begin{cases} \left(2-\frac{1}{t}\right)x + \left(\frac{1}{t}-1\right)y &= x \\ 2\left(1-\frac{1}{t}\right)x + \left(\frac{2}{t}-1\right)y &= y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \left(1-\frac{1}{t}\right)x + \left(\frac{1}{t}-1\right)y &= 0 \\ 2\left(1-\frac{1}{t}\right)x + 2\left(\frac{1}{t}-1\right)y &= 0 \end{cases} \\ &\iff y = x. \end{aligned}$$

   Donc $E_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Déterminons $E_{\frac{1}{t}}$ le sous espace propre de $A(t)$ associé à la valeur propre $\frac{1}{t}$.

   Pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\,1}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} X \in E_{\frac{1}{t}} &\iff A(t)X = \tfrac{1}{t}X \\ &\iff \begin{cases} \left(2-\frac{1}{t}\right)x + \left(\frac{1}{t}-1\right)y &= \frac{x}{t} \\ 2\left(1-\frac{1}{t}\right)x + \left(\frac{2}{t}-1\right)y &= \frac{y}{t} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2\left(1-\frac{1}{t}\right)x + \left(\frac{1}{t}-1\right)y &= 0 \\ 2\left(1-\frac{1}{t}\right)x + \left(\frac{1}{t}-1\right)y &= 0 \end{cases} \\ &\iff y = 2x. \end{aligned}$$

   Donc $E_{\frac{1}{t}} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   Ainsi $A(t) = PD(t)P^{-1}$ avec $D(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Rappel : pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $\chi_A = X^n - \mathrm{tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$.

3. On a $A(1) = I_2$ et $PD(1)P^{-1} = PI_2P^{-1} = I_2$, donc $A(1) = PD(1)P^{-1}$.

4. Soit $t \in \mathbb{R}^*$. On a $\det(A(t)) = \det(PD(t)P^{-1}) = \det(D(t)) = \frac{1}{t}$, donc $A(t)$ est inversible et

$$(A(t))^{-1} = \frac{1}{\det(A(t))} = {}^t\operatorname{Com}(A(t)) = \begin{pmatrix} 2-t & 2(1-t) \\ t-1 & 2t-1 \end{pmatrix}.$$

5. **(a)** On a $D(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix}$, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(D(t))^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{t^n} \end{pmatrix}$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(D(t))^k = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} & 0 \\ 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\frac{1}{t^k} \end{pmatrix} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{pmatrix} \mathrm{e} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\frac{1}{t}} \end{pmatrix},$$

donc la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!}(D(t))^n$ converge et sa somme vaut $\begin{pmatrix} \mathrm{e} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\frac{1}{t}} \end{pmatrix}$. Ainsi $\exp(D(t))$ existe et vaut $\begin{pmatrix} \mathrm{e} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\frac{1}{t}} \end{pmatrix}$.

(c) En vertu de la question de précédente et du rappel au début de l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(A(t))^k &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(PD(t)P^{-1})^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}P(D(t))^k P^{-1} \\ &= P\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(D(t))^k\right)P^{-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} P\exp(D(t))P^{-1}, \end{aligned}$$

donc la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!}(A(t))^n$ converge et sa somme vaut $P\exp(D(t))P^{-1}$. Ainsi $\exp(A(t))$ existe et vaut $P\exp(D(t))P^{-1}$.

(d) On a $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{\det(P)}{}^t\operatorname{Com}(P) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, donc

$$\begin{aligned} \exp(A(t)) &= P\exp(D(t))P^{-1} = P\begin{pmatrix} \mathrm{e} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\frac{1}{t}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\mathrm{e} & -\mathrm{e} \\ -\mathrm{e}^{\frac{1}{t}} & \mathrm{e}^{\frac{1}{t}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e} - \mathrm{e}^{\frac{1}{t}} & -\mathrm{e} + \mathrm{e}^{\frac{1}{t}} \\ 2\mathrm{e} - 2\mathrm{e}^{\frac{1}{t}} & -\mathrm{e} + 2\mathrm{e}^{\frac{1}{t}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

6. **(a)** En vertu de la question précédente, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}^*,\ \exp(A(t)) = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e} - \mathrm{e}^{\frac{1}{t}} & -\mathrm{e} + \mathrm{e}^{\frac{1}{t}} \\ 2\mathrm{e} - 2\mathrm{e}^{\frac{1}{t}} & -\mathrm{e} + 2\mathrm{e}^{\frac{1}{t}} \end{pmatrix} = \mathrm{e}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{\frac{1}{t}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},$$

donc $J = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) Soit $(t,t') \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$. En vertu de la question précédente, on a

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N},\ (A(t)+A(t'))^k &= \left(PD(t)P^{-1}+PD(t')P^{-1}\right)^k = P\left(D(t)+D(t')\right)^k P^{-1}\\ &= P\begin{pmatrix} 2 & 0\\ 0 & \frac{1}{t}+\frac{1}{t'}\end{pmatrix}^k P^{-1} = P\begin{pmatrix} 2^k & 0\\ 0 & \left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t'}\right)^k\end{pmatrix}P^{-1}\end{aligned},$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(A(t)+A(t')\right)^k = P\begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}2^k & 0\\ 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t'}\right)^k\end{pmatrix}P^{-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\begin{pmatrix} e^2 & 0\\ 0 & e^{\frac{1}{t}+\frac{1}{t'}}\end{pmatrix}P^{-1}.$$

Ainsi, en vertu de la question **I.5.c**, on conclut que

$$\begin{aligned}\exp(A(t)+A(t')) &= P\begin{pmatrix} e^2 & 0\\ 0 & e^{\frac{1}{t}+\frac{1}{t'}}\end{pmatrix}P^{-1} = PD(t)D(t')P^{-1}\\ &= (PD(t)P^{-1})(PD(t')P^{-1}) = \exp(A(t))\exp(A(t')).\end{aligned}$$

(c) Raisonnons par récurrence sur n.

- Pour $n=0$: $\forall t \in \mathbb{R},\ (\exp(A(t)))^n = \exp(nA(t)) = I_2$
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que : $\forall t \in \mathbb{R},\ (\exp(A(t)))^n = \exp(nA(t))$.
  Montrons que : $\forall t \in \mathbb{R},\ (\exp(A(t)))^{n+1} = \exp((n+1)A(t))$. On a

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R},\ (\exp(A(t)))^{n+1} &= (\exp(A(t)))^n\exp(A(t))\\ &= \exp(nA(t))\exp(A(t)) \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence}\\ &= \exp(nA(t)+A(t)) \quad \text{d'après la question précédente}\\ &= \exp((n+1)A(t)).\end{aligned}$$

- Conclusion : d'après le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R},\ (\exp(A(t)))^n = \exp(nA(t))$.

(d) Soit $t \in \mathbb{R}^*$. En vertu de la question **I.5.c**, on a

$$\det(\exp(A(t))) = \det(P\exp(D(t)P^{-1})) = \det(\exp(D(t))) = e e^{\frac{1}{t}} \neq 0,$$

donc $\exp(A(t))$ est inversible et

$$\begin{aligned}(\exp(A(t)))^{-1} &= \tfrac{1}{\det(\exp(A(t)))}{}^t\,\mathrm{Com}(\exp(A(t))) = \tfrac{1}{e e^{\frac{1}{t}}}\begin{pmatrix} -e+2e^{\frac{1}{t}} & e-e^{\frac{1}{t}}\\ -2e+2e^{\frac{1}{t}} & 2e-e^{\frac{1}{t}}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 2e^{-1}-e^{-\frac{1}{t}} & -e^{-1}+e^{-\frac{1}{t}}\\ 2e^{-1}-2e^{-\frac{1}{t}} & -e^{-1}+2e^{-\frac{1}{t}}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(e) Soit $t \in \mathbb{R}^*$. D'après la question **I.6.c**, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ (\exp(A(t)))^n = \exp(nA(t))$. Il reste donc à montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (\exp(A(t)))^{-n} = \exp(-nA(t))$. Montrons d'abord que $(\exp(A(t)))^{-1} =$

$\exp(-A(t))$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(-D(t))^k = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} & 0 \\ 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\frac{(-1)^k}{t^k} \end{pmatrix} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-1}{t}} \end{pmatrix},$$

donc $\exp(-D(t)) = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-1}{t}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{t}} \end{pmatrix}^{-1} = (\exp(D(t)))^{-1}$. On a aussi

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(-A(t))^k = P\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(-D(t))^k\right)P^{-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\exp(-D(t))P^{-1},$$

donc

$$\exp(-A(t)) = P\exp(-D(t))P^{-1} = P(\exp(D(t)))^{-1}P^{-1} = (P\exp(-D(t))P^{-1})^{-1} = (\exp(A(t)))^{-1}.$$

Dès lors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (\exp(A(t)))^{-n} = ((\exp(A(t)))^n)^{-1} = (\exp(nA(t)))^{-1} = \exp(-nA(t)).$$

Finalement : $\forall n \in \mathbb{Z},\ (\exp(A(t)))^n = \exp(nA(t))$.

PARTIE II: Exponentielle de la matrice A_a

Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m)$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$.

1. **(a)** Raisonnons par récurrence sur k.

- Pour $k = 1$: on a

$$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}}(f_a) = A_a = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f_a(e_1) & f_a(e_2) & f_a(e_{m-1}) & f_a(e_m) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ a & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots\ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots\ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots 0 & a & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \\ \\ e_m \end{array}$$

Donc

$$\forall i \in [\![1, m-1]\!],\ f_a(e_i) = ae_{i+1} \quad \text{et} \quad f(e_m) = 0. \quad \bigstar$$

- Soit $k \in [\![1, m-2]\!]$. Supposons que :

$$\forall i \in [\![1, m-k]\!],\ f_a^k(e_i) = a^k e_{i+k} \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![m-k+1, m]\!],\ f_a^k(e_i) = 0.$$

Montrons que :

$$\forall i \in [\![1,m-k-1]\!],\ f_a^{k+1}(e_i) = a^{k+1}e_{i+k+1} \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![m-k,m]\!],\ f_a^{k+1}(e_i) = 0.$$

On a :

- $\forall i \in [\![1,m-k-1]\!],\ f_a^{k+1}(e_i) = f_a(f_a^k(e_i)) \overset{\text{HR}}{=} f_a(a^k e_{i+k}) = a^k f_a(e_{i+k}) \overset{\bigstar}{=} a^{k+1}e_{i+k+1}$
- $f_a^{k+1}(e_{m-k}) = f_a(f_a^k(e_{m-k})) \overset{\text{HR}}{=} f_a(a^k e_m) = a^k f_a(e_m) \overset{\bigstar}{=} 0$
- $\forall i \in [\![m-k+1,m]\!],\ f_a^{k+1}(e_i) = f_a(f_a^k(e_i)) \overset{\text{HR}}{=} f_a(0) = 0$

Donc

$$\forall i \in [\![1,m-k-1]\!],\ f_a^{k+1}(e_i) = a^{k+1}e_{i+k+1} \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![m-k,m]\!],\ f_a^{k+1}(e_i) = 0.$$

- Conclusion : d'après le principe de récurrence

$$\forall k \in [\![1,m-1]\!], \forall i \in [\![1,m-k]\!],\ f_a^k(e_i) = a^k e_{i+k} \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![m-k+1,m]\!],\ f_a^k(e_i) = 0.$$

(b) Raisonnons par récurrence sur k.

- Pour $k = m$: d'après la question **II.1.a**, pour $k = m-1$, on a

$$f_a^{m-1}(e_1) = a^{m-1}e_m \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![2,m]\!],\ f_a^{m-1}(e_i) = 0.$$

Donc, en vertu de $\bigstar$ ci-dessus, on a $f_a^m(e_1) = f_a(f_a^{m-1}(e_1)) = f_a(a^{m-1}e_m) = a^{m-1}f(e_m) = 0$ et

$$\forall i \in [\![2,m]\!],\ f_a^m(e_i) = f_a(f_a^{m-1}(e_i)) = f_a(0) = 0.$$

Ainsi : $\forall i \in [\![1,m]\!],\ f_a^m(e_i) = 0$.

- Soit $k \geqslant m$. Supposons que : $\forall i \in [\![1,m]\!],\ f_a^k(e_i) = 0$. Montrons que : $\forall i \in [\![1,m]\!],\ f_a^{k+1}(e_i) = 0$. On a

$$\forall i \in [\![1,m]\!],\ f_a^{k+1}(e_i) = f_a(f_a^k(e_i)) = f_a(0) = 0.$$

- Conclusion : d'après le principe de récurrence : $\forall k \geqslant m, \forall i \in [\![1,m]\!],\ f_a^k(e_i) = 0$.

(c) En vertu de **II.1.a**, on a

$$\forall k \in [\![1,m-1]\!],\ A_a^k = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}\left(f_a^k\right) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f_a^k(e_1) & \qquad f_a^k(e_{m-k}) & f_a^k(e_m) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & & & & & \vdots \\ a^k & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \ddots\ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots\ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots 0 & a^k & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ \\ \\ e_{k+1} \\ \\ \\ \mathrm{e_m} \end{array} \end{array}$$

et

$$\forall k \geqslant m,\ A_a^k = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}\left(f_a^k\right) = 0,$$

donc la série $\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k!}A_a^k$ converge et

$$\exp(A_a)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}A_a^k=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{k!}A_a^k=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\ \frac{a}{1!} & \ddots & \ddots & & & & \vdots\\ \frac{a^2}{2!} & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots\\ \frac{a^3}{3!} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \frac{a^{m-1}}{(m-1)!} & \cdots & \cdots & \frac{a^3}{3!} & \frac{a^2}{2!} & \frac{a}{1!} & 1 \end{pmatrix}.$$

2. **(a)** (i) *Remarque : rectifiez, dans cette question, une erreur de frappe : il faut échanger les places de t et s.*

On a

$$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}}(g_a)=E_a(t)=\begin{pmatrix} 1 & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\ \frac{ta}{1!} & \ddots & \ddots & & & & \vdots\\ \frac{(ta)^2}{2!} & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots\\ \frac{(ta)^3}{3!} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \frac{(ta)^{m-1}}{(m-1)!} & \cdots & \cdots & \frac{(ta)^3}{3!} & \frac{(ta)^2}{2!} & \frac{ta}{1!} & 1 \end{pmatrix},$$

donc : $\forall i\in[\![1,m]\!]$, $g_a(e_i)=\sum_{j=i}^{m}\frac{(at)^{j-i}}{(j-i)!}e_j$.

De même, on trouve : $h_a(e_i)=\sum_{j=i}^{m}\frac{(sa)^{j-i}}{(j-i)!}e_j$. Ainsi, pour tout $i\in[\![1,m]\!]$,

$$(h_a\circ g_a)(e_i)=h_a(g_a(e_i))=h_a\left(\sum_{j=i}^{m}\frac{(ta)^{j-i}}{(j-i)!}e_j\right)=\sum_{j=i}^{m}\frac{(ta)^{j-i}}{(j-i)!}h_a(e_j)=\sum_{j=i}^{m}\frac{(ta)^{j-i}}{(j-i)!}\sum_{h=j}^{m}\frac{(sa)^{h-j}}{(h-j)!}e_h.$$

(ii) Pour tout $i\in[\![1,m]\!]$, on a

$$\begin{aligned} h_a\circ g_a)(e_i) &= \sum_{j=i}^{m}\frac{(ta)^{j-i}}{(j-i)!}\sum_{h=j}^{m}\frac{(sa)^{h-j}}{(h-j)!}e_h=\sum_{j=i}^{m}\sum_{h=j}^{m}\frac{t^{j-i}}{(j-i)!}\frac{s^{h-j}}{(h-j)!}a^{h-i}e_h\\ &= \sum_{i\leqslant j\leqslant h\leqslant m}\frac{t^{j-i}}{(j-i)!}\frac{s^{h-j}}{(h-j)!}a^{h-i}e_h=\sum_{h=i}^{m}\sum_{j=i}^{h}\frac{t^{j-i}}{(j-i)!}\frac{s^{h-j}}{(h-j)!}a^{h-i}e_h. \end{aligned}$$

(iii) On considère φ l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $E_a(t+s)$. On a

$$\begin{aligned}
\forall i \in [\![1,m]\!],\ \varphi(e_i) &= \sum_{h=i}^{m} \frac{(a(t+s))^{h-i}}{(h-i)!} e_h = \sum_{h=i}^{m} \frac{1}{(h-i)!}\left(\sum_{k=0}^{h-i} \mathrm{C}_{h-i}^{k} r^k s^{h-i-k}\right) a^{h-i} e_h \\
&= \sum_{h=i}^{m}\sum_{k=0}^{h-i} \frac{1}{k!}\frac{1}{(h-i-k)!} r^k s^{h-i-k} a^{h-i} e_h \\
&\overset{j=k+i}{=} \sum_{h=i}^{m}\sum_{j=i}^{h} \frac{r^{j-i}}{(j-i)!}\frac{s^{h-j}}{(h-j))!} a^{h-i} e_h = (h_a \circ g_a)(e_i).
\end{aligned}$$

Or $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_m)$ est une base de $\mathbb{R}^m$, alors [2] $\varphi = h_a \circ g_a$ et par conséquent

$$E_a(s+t) = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(\varphi) = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(h_a \circ g_a) = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(h_a)\,\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(g_a) = E_a(t)E_a(s).$$

(b) Soit $t \in \mathbb{R}$. En vertu de la question précédente, on a

$$E_a(t)E_a(-t) = E_a(0) = I_m \quad \text{et} \quad E_a(-t)E_a(t) = E_a(0) = I_m,$$

donc $E_a(t)$ est inversible et $(E_a(t))^{-1} = E_a(-t)$.

(c) Raisonnons par récurrence sur n.

- Pour $n = 0$: on a $E_a(nt) = (E_a(t))^n = I_m$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $E_a(nt) = (E_a(t))^n$. Montrons que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $E_a((n+1)t) = (E_a(t))^{n+1}$. En vertu de la question **II.2.a.iii**, on a

$$\forall t \in \mathbb{R},\ E_a((n+1)t) = E_a(nt+t) = E_a(nt)E_a(t) \overset{\mathrm{HR}}{=} (E_a(t))^n E_a(t) = (E_a(t))^{n+1}.$$

- Conclusion : d'après le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}$, $E_a(nt) = (E_a(t))^n$.

(d) (i) Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_{m-1} \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\lambda_0 I_m + \lambda_1 A_a + \cdots + \lambda_{m-1}A_a^{m-1} = 0 &\iff \begin{pmatrix}
\lambda_0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\frac{\lambda_1 a}{1!} & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\
\frac{\lambda_2 a^2}{2!} & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\
\frac{\lambda_3 a^3}{3!} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\frac{\lambda_{m-1}a^{m-1}}{(m-1)!} & \cdots & \cdots & \frac{\lambda_3 a^3}{3!} & \frac{\lambda_2 a^2}{2!} & \frac{\lambda_1 a}{1!} & \lambda_0
\end{pmatrix} = 0 \\
&\iff \lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{m-1} = 0.
\end{aligned}$$

Donc la famille $(I_m, A_a, \ldots, A_a^{m-1})$ est libre.

2. Rappel : $f, g : E \longrightarrow F$ deux application linéaires et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. alors : $f = g \iff \forall i \in [\![1,n]\!],\ f(e_i) = g(e_i)$.

(ii) Soient $t, s \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} E_a(t) = E_a(s) &\iff \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} A_a^k = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{s^k}{k!} A_a^k \iff \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k - s^k}{k!} A_a^k = 0 \\ &\iff \forall k \in [\![1, m-1]\!],\ \tfrac{t^k - s^k}{k!} = 0 \quad \text{car } (I_m, A_a, \dots, A_a^{m-1}) \text{ d'après } \mathbf{II.2.d.i} \\ &\iff r = s. \end{aligned}$$

Ainsi [3] l'application $t \longmapsto E_a(t)$ est injective.

(e) D'après **II.1.c**, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} A_a^k = E_a(1)$. Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} E_a(t^2 - 3t + 3) = \exp(A_a) &\iff E_a(t^2 - 3t + 3) = E_a(1) \\ &\iff t^2 - 3t + 3 = 1 \quad \text{car } t \longmapsto E_a(t) \text{ est injective d'après } \mathbf{II.2.d.ii} \\ &\iff t^2 - 3t + 2 = 0 \iff t = 1 \text{ ou } t = 2. \end{aligned}$$

Partie III: Applications

1. **(a)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ nu_n + v_n \\ \frac{n^2}{2} u_n + n v_n + w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ \frac{n^2}{2} & n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} =$ $F_n X_n$, avec $F_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ \frac{n^2}{2} & n & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$F_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ \frac{n^n}{2} & n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_3 + nA_1 + \frac{n^2}{n!} A_1^2 = E_1(n),$$

donc

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n &= F_{n-1} X_{n-1} = F_{n-1} F_{n-2} X_{n-2} = \cdots = F_{n-1} F_{n-2} \cdots F_0 X_0 \quad \text{en vertu de } \mathbf{III.1.a} \\ &= E_1(n-1) E_1(n-2) \cdots E_1(0) X_0 \\ &= E_1((n-1) + (n-2) + \cdots + 0) X_0 \quad \text{d'après la question } \mathbf{II.2.iii} \\ &= E_1\left(\tfrac{n(n-1)}{2}\right) X_0. \end{aligned}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, on a

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = E_a\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{n(n-1)}{2} & 1 & 0 \\ \frac{n^2(n-1)^2}{8} & \frac{n(n-1)}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4n(n-1) + 2 \\ n^2(n-1)^2 + n(n-1) + 3 \end{pmatrix},$$

donc $u_n = 8$, $v_n = 4n(n-1) + 2$ et $w_n = n^2(n-1)^2 + n(n-1) + 3$.

3. Rappel : Une application $f : \longrightarrow F$ est injective ssi : $\forall x, x' \in E,\ f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$.

2. **(a)** On a

$$C_n = I_2 + E_a(1/n) - {}^tE_a(1/n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a/n & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -a/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a/n \\ a/n & 1 \end{pmatrix}.$$

On pose $\alpha_n = \sqrt{1 + a^2/n^2}$. On a $\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)^2 + \left(\frac{a/n}{\alpha_n})\right)^2 = 1$, il existe donc $\theta_n \in]-\pi, \pi]$ tel que $\cos\theta_n = \frac{1}{\alpha_n}$ et $\sin\theta_n = \frac{a/n}{\alpha_n}$ ou encore $1 = \alpha_n \cos\theta_n$ et $\frac{a}{n} = \alpha_n \sin\theta_n$. Du coup

$$C_n = \begin{pmatrix} 1 & -a/n \\ a/n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_n \cos\theta_n & -\alpha_n \sin\theta_n \\ \alpha_n \sin\theta_n & \alpha_n \cos\theta_n \end{pmatrix} = \alpha_n \begin{pmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{pmatrix}.$$

En outre, on a $\cos\theta_n = \frac{1}{\alpha_n} > 0$, alors $\theta_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

(b)
- Par une récurrence simple on trouve : $C_n = \alpha_n^n \begin{pmatrix} \cos(n\theta_n) & -\sin(n\theta_n) \\ \sin(n\theta_n) & \cos(n\theta_n) \end{pmatrix}$.
- En vertu de la question précédente, on a $\tan\theta_n = \frac{\sin\theta_n}{\cos\theta_n} = \frac{a}{n}$. Or $\theta_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on obtient $\theta_n = \arctan\left(\frac{a}{n}\right)$. Du coup $n\theta_n = n \arctan\left(\frac{a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} a \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.
- On a $\ln(\alpha_n^n) = n\ln(\alpha_n) = \frac{n}{2}\ln\left(1 + \frac{a^2}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $\alpha_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
- Conclusion : $C_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$.

3. **(a)** On a :

$$\begin{aligned}(S) &\iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2-\sqrt{2})x + (\sqrt{2}-1)y \\ 2(1-\sqrt{2})x + (2\sqrt{2}-1)y \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2-\sqrt{2}) & (\sqrt{2}-1) \\ 2(1-\sqrt{2}) & (2\sqrt{2}-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff X' = A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)X.\end{aligned}$$

Donc : $t_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(b) D'après la question **I.2** on a $A(t_0) = PD(t_0)P^{-1}$, donc

$$X' = A(t_0)X \iff X' = PD(t_0)P^{-1}X \iff P^{-1}X' = D(t_0)P^{-1}X \iff Y' = D(t_0)Y.$$

(c) Notons $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. En vertu de la question précédente, on a

$$\begin{aligned}(S) &\iff Y' = D(t_0)Y \iff \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \iff \begin{cases} u' = u \\ v' = \sqrt{2}v \end{cases} \\ &\iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ : \begin{cases} u = \alpha \mathrm{e}^{\mathrm{t}} \\ v = \beta \mathrm{e}^{\sqrt{2}\mathrm{t}} \end{cases} \\ &\iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ : \ X = PY = \begin{pmatrix} \alpha \mathrm{e}^{\mathrm{t}} + \beta \mathrm{e}^{\sqrt{2}\mathrm{t}} \\ \alpha \mathrm{e}^{\mathrm{t}} + 2\beta \mathrm{e}^{\sqrt{2}\mathrm{t}} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Donc $x = \alpha\mathrm{e}^{\mathrm{t}} + \beta\mathrm{e}^{\sqrt{2}\mathrm{t}}$ et $y = \alpha\mathrm{e}^{\mathrm{t}} + 2\beta\mathrm{e}^{\sqrt{2}\mathrm{t}}$. Avec les conditions initiales $x(0) = 1$ e $y(0) = -1$, on obtient $\alpha = 3$ et $\beta = -2$. Ainsi $x = 3\mathrm{e}^{\mathrm{t}} - 2\mathrm{e}^{\sqrt{2}\mathrm{t}}$ et $y = 3\mathrm{e}^{\mathrm{t}} - 4\mathrm{e}^{\sqrt{2}\mathrm{t}}$.

(d) (i) $\exp(tA(t_0)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}(A(t_0))^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} P(D(t_0))^k P^{-1} = P\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}(tD(t_0))^k\right) P^{-1} = P\exp(tD(t_0))P^{-1}$

(ii) En vertu de la question précédente, on a

$$\begin{aligned} Z(t) &= \exp(tA(t_0))Z(0) = P\exp(tD(t_0))P^{-1}Z(0) = P\exp(tD(t_0))\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= P\begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{t\sqrt{t}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^t \\ -2\mathrm{e}^{t\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^t - 2\mathrm{e}^{t\sqrt{2}} \\ 3\mathrm{e}^t - 4\mathrm{e}^{t\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(iii) $X = Z$.

Problème 2

Partie I: Quelques propriétés d'un endomorphisme orthogonal

1. **(a)** • Pour tout $x \in E$, on a

$$x \in \mathrm{Ker} f \iff f(x) = 0 \iff \| f(x) \| = 0 \iff \| x \| = 0 \iff x = 0,$$

donc $\mathrm{Ker} f = \{0\}$ et par suite f est injectif. Or f est un endomorphisme de E et E est dimension finie, alors f est bijectif.

• Puisque f est orthogonal, alors, pour tout $x \in E$, $\left\| f^{-1}(x) \right\| = \left\| f(f^{-1}(x)) \right\| = \| x \|$. Ainsi f^{-1} est un endomorphisme orthogonal.

(b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Spe}(f) &\iff \exists x \in E \setminus \{0\} \ : \ f(x) = \lambda x \\ &\implies \exists x \in E \setminus \{0\} \ : \ \| f(x) \| = \| \lambda x \| \\ &\implies \exists x \in E \setminus \{0\} \ : \ \| x \| = |\lambda| \, \| x \| \quad \text{car } f \text{ est orthogonal} \\ &\implies |\lambda| = 1. \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathrm{Spe}(f) \subset \{-1, 1\}$.

2. **(a)** ($\Leftarrow$) Supposons que : $\forall x, y \in E$, $< f(x), f(y) >=< x, y >$. En particulier, en prenant $x = y$, on a :

$$\forall x \in E, \ < f(x), f(x) >=< x, x > \iff \| f(x) \|^2 = \| x \|^2 \iff \| f(x) \| = \| x \| .$$

Ainsi f est orthogonal.

($\Rightarrow$) Supposons que f est orthogonal. On a

$$\begin{aligned} \forall x, y \in E, \ < f(x), f(y) > &= \tfrac{1}{4}\left(\| f(x) + f(y) \|^2 - \| f(x) - f(y) \|^2\right) \\ &= \tfrac{1}{4}\left(\| f(x + y) \|^2 - \| f(x - y) \|^2\right) \quad \text{car } f \text{ est linéaire} \\ &= \tfrac{1}{4}\left(\| x + y \|^2 - \| x - y \|^2\right) \quad \text{par hypothèse} \\ &= < x, y > . \end{aligned}$$

(b) Notons n la dimension de E.

($\Rightarrow$) Supposons que f est orthogonal et soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. En vertu de la question précédente, on a

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ < f(e_i), f(e_j >=< e_i, e_j >= \delta_{ij}.$$

Donc $f(\mathcal{B}) = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est orthonormale à n éléments. C'est donc une base de E.

($\Leftarrow$) Supposons que f transforme toute base orthonormée de E en une base orthonormée de E.

E étant un espace euclidien, il a donc une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Alors par hypothèse $f(\mathcal{B}) = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est aussi une base orthonormée de E.

Soit $x \in E$, il existe donc $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tels que $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$. On a [4]

$$\| f(x) \|^2 = \| f(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) \|^2 = \| x_1 f(e_1) + \cdots + x_n f(e_n) \|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = \| x \|^2 .$$

Ainsi f est orthogonal.

3. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de f dans une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E. On a

$$\forall j \in [\![1,n]\!]^2,\ f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i,$$

donc, puisque $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E, on a

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ < f(e_i), f(e_j) >= \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj}.$$

Par ailleurs, on a

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ [{}^t AA]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [{}^t A]_{ik} [A]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj}.$$

Dès lors : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, [{}^t AA]_{ij} =< f(e_i), f(e_j) >$. Ainsi

$$\begin{aligned}
f \text{ est orthogonal} &\iff f(\mathcal{B}) = (f(e_1), \ldots, f(e_n)) \text{ est une b.o.n. de } E \quad \text{d'après } \mathbf{I.2.a} \\
&\iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ < f(e_i), f(e_j) >= \delta_{ij} \\
&\iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, [{}^t AA]_{ij} = \delta_{ij} \\
&\iff {}^t AA = I_n \\
&\iff A \text{ est orthogonale.}
\end{aligned}$$

4. **(a)** Notons $u = f + f^{-1}$. On a

$$\begin{aligned}
\forall (x,y) \in E^2,\ < u(x), y > &= < f(x) + f^{-1}(x), y >=< f(x), y > + < f^{-1}(x), y > \\
&= < x, f^{-1}(y) > + < x, f(y) > \quad \text{car } f \text{ est orthogonal} \\
&= < x, f(y) + f^{-1}(y) >=< x, u(y) > .
\end{aligned}$$

---

4. Rappel : Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E et $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \in E$, alors $< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ et $\| x \|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

Donc $u = f + f^{-1}$ est un endomorphisme symétrique de E.

(b) (i) Notons λ la valeur propre de $f + f^{-1}$ associée au vecteur propre x. Donc $f + f^{-1}(x) = \lambda x$ et par suite $f^2(x) + x = \lambda f(x)$ ou encore $f^2(x) = \lambda f(x) - x$. Ainsi

$$f(\mathbf{Vect}(x, f(x))) = \mathbf{Vect}(f^2(x), f(x)) = \mathbf{Vect}(\lambda f(x) - x, f(x)) = \mathbf{Vect}(x, f(x).$$

On conclut que $\mathbf{Vect}(x, f(x))$ est stable par f.

(ii) On a $\mathbf{Vect}(x) \subset \mathbf{Vect}(x, f(x))$ et $x \neq 0$, donc $1 = \dim(\mathbf{Vect}(x)) \leqslant \dim(\mathbf{Vect}(x, f(x))) \leqslant 2$. De plus $\mathbf{Vect}(x, f(x))$ est stable par f en vertu de la question précédente. Ainsi f admet au moins un sous espace vectoriel stable de dimension 1 ou 2.

(c) (i) Puisque F est stable par f, alors $f(F) \subset F$. D'après la question **I.1.a** f est bijectif, donc $\dim f(F) = \dim F$. Ainsi $f(F) = F$.

(ii) Soit $x \in F^{\perp}$. Montrons que $f(x) \in F^{\perp}$. En vertu de **II.2.a**, on a : $\forall x' \in F,\ < f(x), f(x') >=< x, x' >= 0$. Or, d'après la question précédente, $f(F) = F$, alors : $\forall y \in F,\ < f(x), y >= 0$. Il s'ensuit que $f(x) \in F^{\perp}$. Ainsi $F^{\perp}$ est stable par f.

Partie II: Distance à un sous espace vectoriel

1. Il clair que $< .,. >$ est une forme bilinéaire, symétrique. De plus

$$\forall P \in E,\ < P, P >= \int_0^{+\infty} P^2(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \geqslant 0$$

et :

$$\begin{aligned}
\forall P \in E,\ < P, P >= 0 &\iff \int_0^{+\infty} P^2(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = 0 \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R}_+,\ P^2(t)\mathrm{e}^{-t} = 0 \quad \text{car } \mapsto \mathrm{P}^2(\mathrm{t})\mathrm{e}^{-\mathrm{t}} \text{ est continue, positive} \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R}_+,\ P(t) = 0 \\
&\iff P = 0 \quad \text{car } P \text{ est un polynôme ayant une infinité de racines}
\end{aligned}$$

Donc $< .,. >$ est défini positif. Ainsi $< .,. >$ est un produit scalaire sur E.

2. On considère la forme linéaire $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall P \in E,\ \varphi(P) = P(0)$.
Puisque $\varphi(X + 1) = 1 \neq 0$, donc φ est nulle. On a $\mathrm{Ker}\varphi = \{P \in E\ :\ \varphi(P) = 0\} = \{P \in E\ :\ P(0) = 0\} = F$.
Ainsi F est un hyperplan de E en tant que noyau de la forme linéaire non nulle φ de E.

3. **(a)** Soit $k \in [\![1, m-1]\!]$. La famille $(P_0, \ldots, P_{m-1})$ étant l'orthonormalisée de Schmidt $(1, X, \ldots, X^{m-1})$, donc

$$\forall l \in [\![0, m-1]\!],\ \mathbf{Vect}(P_0, \ldots, P_l) = \mathbf{Vect}(1, X, \ldots, X^k) = \mathbb{R}_l[X].$$

En particulier, on a $P_k \in \mathbb{R}_k[X]$ et en suite $P_k' \in \mathbb{R}_{k-1}[X] = \mathbf{Vect}(P_0, \ldots, P_{k-1})$. Or P_k est orthogonal au vecteurs $P_0, \ldots, P_{k-1}$, alors P_k est orthogonal à P_k' qui est combinaison linéaire de $P_0, \ldots, P_{k-1}$. De plus $P_0' = 0$ est orthogonal à tout vecteur de E et notamment P_0. Ainsi P_k et P_k' sont orthogonaux pour tout $k \in [\![0, m-1]\!]$.

(b) Soit $k \in [\![0, m-1]\!]$. D'après la question précédente, on a $P'_k \perp P_k$, donc

$$\begin{aligned}
0 &= <P'_k, P_k>= \int_0^{+\infty} P'_k(t) \times P_k(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}\mathrm{dt} \\
&\overset{\text{IPP}}{=} [P_k(t) \times P_k(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}]_{t=0}^{t\to+\infty} - \int_0^{+\infty} P'_k(t) \times (P'_k(t) - P_k)\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}\mathrm{dt} \\
&= -P_k^2(0) - \int_0^{+\infty} P_k(t)P'_k(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}\mathrm{dt} + \int_0^{+\infty} \mathrm{P_k^2(t)e^{-t}dt} \\
&= -P_k^2(0) - <P'_k, P_k> + \| P_k \|_E^2 \\
&= -P_k^2(0) + \| P_k \|_E^2 \quad \text{car } P'_k \perp P_k
\end{aligned}.$$

Alors $P_k^2(0) = \| P_k \|_E^2 = 1$.

(c) Soit $k \in [\![0, m-1]\!]$. On a

$$\begin{aligned}
<P_k, S> &= <P_k - P_k(0) + P_k(0), S> \\
&= <P_k - P_k(0), S> + <P_k(0), S> \\
&= <P_k(0), S> \qquad \text{car } P_k - P_k(0) \in F \text{ et } S \in F^\perp \\
&= P_k(0) <1, S>.
\end{aligned}$$

(d) Puisque $(P_0, \ldots, P_{m-1})$ est une base orthonormée de E, alors [5]

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=0}^{m-1} <P_k, S> P_k \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} P_k(0) <1, S> P_k \qquad \text{d'après la question précédente} \\
&= \alpha \sum_{k=0}^{m-1} P_k(0) P_k.
\end{aligned}$$

4. **(a)** Pour tous $P, Q \in E$, on a [6]

$$\begin{aligned}
<\varphi(P), Q> &= <\varphi(P), Q - \varphi(Q) + \varphi(Q)>=<\varphi(P), Q - \varphi(Q)> + <\varphi(P), \varphi(Q)> \\
&= <\varphi(P), \varphi(Q)> \qquad \text{car } \varphi(P) \in F \text{ et } Q - \varphi(Q) \in F^\perp \\
&= <\varphi(P) - P + P, \varphi(Q)>=<\varphi(P) - P, \varphi(Q)> + <P, \varphi(Q)> \\
&= <P, \varphi(Q)>. \qquad \text{car } \varphi(Q) \in F \text{ et } P - \varphi(P) \in F^\perp
\end{aligned}$$

Donc φ est un endomorphisme symétrique.

(b) Pour tout $P \in E$, on a [7]

$$\begin{aligned}
\| \psi(P) \|^2 &= \| 2\varphi(P) - P \|^2 = 4 \| \varphi(P) \|^2 - 4 <\varphi(P), P> + \| P \|^2 \\
&= 4 \| \varphi(P) \|^2 - 4 <\varphi(P), P - \varphi(P) + \varphi(P)> + \| P \|^2 \\
&= 4 \| \varphi(P) \|^2 - 4 <\varphi(P), P - \varphi(P)> - 4 \| \varphi(P) \|^2 + \| P \|^2 \\
&= \| P \|^2. \qquad \text{car } \varphi(P) \in F \text{ et } P - \varphi(P) \in F^\perp
\end{aligned}$$

5. Rappel : Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une BON d'un espace euclidien E, alors : $\forall x \in E,\ x =<x, e_1> e_1 + \cdots + <x, e_n> e_n$

6. Rappel : Si F est un sev d'un espace préhilbertien E et p est la projection orthogonale sur F, alors : $\forall x \in E,\ p(x) \in F$ et $x - p(x) \in F^\perp$

7. Rappel : Si E est un espace préhilbertien muni du produit scalaire $< .,. >$, alors : $\forall x, y \in E,\ \| x + y \|^2 = \| x \|^2 + 2 <x, y> + \| y \|^2$ et $\| x - y \|^2 = \| x \|^2 - 2 <x, y> + \| y \|^2$

Donc ψ est un endomorphisme orthogonal.

(c) Soit $P \in E$. On sait que $P - \varphi(P) \in F^{\perp} = \mathbb{R}.S$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P - \varphi(P) = \lambda S$.

Par ailleurs, on a

$$< S, P-\varphi(P) >=< S, \lambda S > \Longrightarrow < S, P > - < S, \varphi(P) >= \lambda \| S \|^2 \Longrightarrow < S, P >= \lambda \| S \|^2 \Longrightarrow \lambda = \frac{< P, S >}{\| S \|^2}.$$

On déduit que : $\varphi(P) = P - \frac{<P,S>}{\| S \|^2} S$.

5. Puisque $\varphi(h)$ est la projection orthogonale de h sur F, alors $d(h,F) = \| h - \varphi(h) \| \overset{\textbf{II.4.c}}{=} \left\| \frac{<h,S>}{\| S \|^2} S \right\| = \frac{|\alpha|}{\| S \|}$.

D'après **II.3.d**, on a $S = \alpha \sum_{k=0}^{m-1} P_k(0) P_k$, et comme $(P_0, \ldots, P_{m-1})$ est une base orthonormée de E, alors $\| S \|^2 = \alpha^2 \sum_{k=0}^{m-1} P_k^2(0) \overset{\textbf{II.3.b}}{=} \alpha^2 m$. On conclut que $d(h,F) = \frac{|\alpha|}{\| S \|} = \frac{|\alpha|}{|\alpha| \sqrt{m}} = \frac{1}{\sqrt{m}}$.

6. On a $\varphi(h)$ est la projection orthogonale de h sur F, donc $h - \varphi(h) \overset{\textbf{II.4.c}}{=} \frac{<h,S>}{\| S \|^2} S$ est la projection orthogonale de h sur $F^{\perp}$, du coup $d(h, F^{\perp}) = \left\| h - \frac{<h,S>}{\| S \|^2} S \right\|$. Par ailleurs, on a

$$\left\| h - \frac{< h, S >}{\| S \|^2} S \right\|^2 = \| h \|^2 - 2 \frac{(< h, S >)^2}{\| S \|^2} + (< h, S >)^2 = 1 - 2 \frac{\alpha^2}{\alpha^2 m} + \alpha^2 = 1 + \alpha^2 - \frac{2}{m}.$$

On déduit que : $d(h, F^{\perp}) = \sqrt{1 + \alpha^2 - \frac{2}{m}}$.